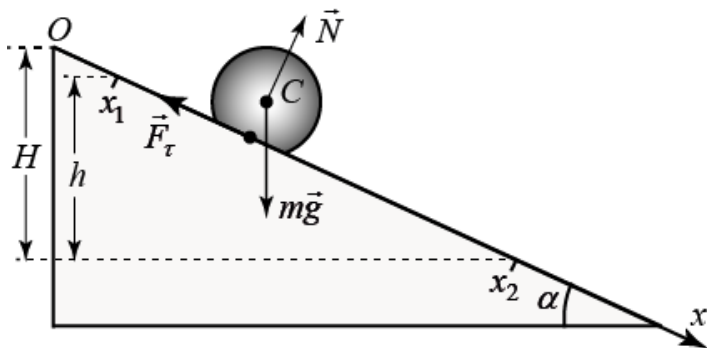


LUCRARE DE LABORATOR DE ÎNȚIERE

Verificarea legii conservării energiei mecanice la rostogolirea unei bile pe un uluc înclinat

Îndrumar de laborator la fizică



UNIVERSITATEA TEHNICĂ A MOLDOVEI
Facultatea Inginerie și Management în Electronică și
Telecomunicații

Catedra Fizică

LUCRARE DE LABORATOR
DE ÎNȚIERE

Verificarea legii conservării energiei
mecanice la rostogolirea unei bile pe
un uluc înclinat

Îndrumar de laborator la fizică

Chișinău
Editura „Tehnica-UTM”
2015

Îndrumarul de laborator este elaborat în conformitate cu programele de studii la fizică pentru Universitatea Tehnică. Sunt formulate scopul și obiectivele lucrării și este prezentat succint materialul teoretic la tema studiată. De asemenea, sunt formulate întrebări de control, răspunsul la care necesită minimul de cunoștințe necesare pentru admiterea la efectuarea lucrării de laborator.

Îndrumarul este destinat studenților tuturor specialităților, secțiilor la zi și cu frecvență redusă.

Autori: conf. univ., dr. A. Rusu
lector superior C. Pîrțac
lector superior S. Gutium

Recenzent – conf. univ., dr. S. Rusu

Redactor: E. Gheorghîșteanu

Bun de tipar 15.06.15.

Hârtie ofset. Tipar RISO

Coli de tipar 1,5.

Formatul hârtiei 60x84 1/16.

Tirajul 55 ex.

Comanda nr.60

2004, U.T.M., Chișinău, bd. Ștefan cel Mare și Sfânt, 168.

Editura „Tehnica-UTM”

2068, Chișinău, str. Studenților, 9/9

Lucrare de laborator de inițiere

Verificarea legii conservării energiei mecanice la rostogolirea unei bile pe un uluc înclinat

Scopul lucrării: verificarea experimentală a legii conservării energiei mecanice la rostogolirea unei bile pe un uluc înclinat.

Obiective: în urma efectuării acestei lucrări studenții vor fi capabili:

- să definească mișcările de translație și de rotație, noțiunile de viteză și viteză unghiulară, noțiunile de masă și de moment de inerție, noțiunea de energie cinetică a corpului în cazurile mișcării de translație și a celei de rotație, noțiunile de energie potențială și energie mecanică;
- să formuleze legea conservării energiei mecanice;
- să utilizeze formulele pentru momentul de inerție și pentru energia cinetică a unei bile ce efectuează o mișcare de rotație;
- să utilizeze cronometrul electronic pentru măsurarea intervalelor de timp atât în regim manual, cât și în cel interfațat calculatorului;
- să obțină experimental graficul dependenței energiei cinetice

$$Y = E_c = \frac{2mR^2}{t_1^2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - e^2} \right) \quad \text{de energia potențială}$$

$X = E_p = mg(x_2 - x_1)H/x_2$ și să demonstreze că ea reprezintă un segment de dreaptă cu panta $p = 1$;

- să estimeze erorile standard comise la măsurarea directă a intervalului de timp, precum și la măsurarea indirectă a energiei cinetice, a pantei drepte și a termenului liber;

- să analizeze rezultatele obținute și să tragă concluzii privind veridicitatea legii conservării energiei mecanice la rostogolirea unei bile pe ulucul înclinat pentru diferite nivele de încredere.

Materiale și accesorii: Calculator, soft pentru procesarea datelor experimentale, cablu COM, cronometru electronic, 1 senzor, uluc înclinat, bilă, șubler, riglă.

Considerații teoretice și experimentale

Mișcarea unui corp se numește de translație, dacă orice dreaptă legată de acesta se deplasează în decursul mișcării paralel cu poziția sa inițială. **Mișcare de rotație a unui corp se numește mișcarea în care toate**

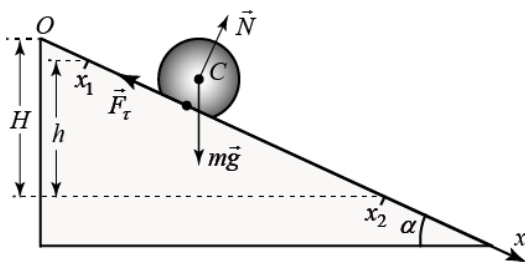


Fig. 1

punctele corpului descriu cercuri ale căror centre se află pe o dreaptă numită axă de rotație. La rostogolirea unei bile pe un uluc orizontal sau înclinat (fig. 1) sunt prezente ambele tipuri de mișcare: de translație cu viteza v_c a centrului de masă C al bilei și de rotație față de axa ce trece prin centrul de masă C perpendicular planului figurii 1. Fiecărui tip de mișcare îi corespunde energia sa cinetică. **Energie cinetică se numește măsura mișcării unui corp egală cu lucrul mecanic pe care acesta îl poate efectua până la oprirea completă.** După cum arată calculele bazate pe această definiție (vezi [1]), energia cinetică a unui corp de masa m ce efectuează o mișcare de translație cu viteza v (măsura mișcării de translație) este:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} \quad (1)$$

Prin masa corpului m se subînțelege **măsura inerției acestuia la mișcarea de translație**, adică mărimea ce descrie proprietatea corpurilor de a se împotrivi variației vitezei. Viteza corpului v reprezintă distanța S parcursă de acesta în unitatea de timp. Întrucât la mișcarea de rotație poziția corpului se indică cu ajutorul unghiului de rotație φ , rapiditatea variației poziției lui se descrie cu ajutorul vitezei unghiulare ω , care reprezintă unghiul descris de corp în unitatea de timp. Astfel, energia cinetică a unui corp ce efectuează o mișcare de rotație, prin analogie cu formula precedentă ($v \rightarrow \omega$ și $m \rightarrow I$), poate fi scrisă în forma

$$E_c = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (2)$$

unde prin I este notată mărimea fizică ce descrie măsura inerției corpului la mișcarea de rotație, numită și **moment de inerție**, care nu este masa corpului ca în cazul mișcării de translație, ci o mărime ce depinde atât de masa corpului, cât și de distribuția acesteia față de axa de rotație [1]:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (3)$$

Astfel, momentul de inerție al unui corp față de o anumită axă de rotație reprezintă suma produselor maselor m_i ale punctelor materiale ale acestui corp și pătratele r_i^2 a distanțelor lor până la axa considerată. În cazul distribuției continue a masei corpului, semnul sumei din formula (3) trece în cel al integralei [1]:

$$I = \int_{(V)} r^2 dm \quad (4)$$

unde dm este masa unui element infinitesimal al corpului, iar V este volumul corpului.

Se poate demonstra (vezi [1]) că momentul de inerție al unei bile omogene de masa m și raza R față de axa ce coincide cu unul din diametrele sale este:

$$I = \frac{2}{5} mR^2. \quad (5)$$

Vom observa că, pe lângă proprietatea fundamentală a corpurilor de a se mișca, proprietate ce se descrie cu ajutorul mărimii fizice numite energie cinetică, corpurile mai posedă și proprietatea de a interacționa între ele. Măsura interacțiunii corpurilor egală cu lucrul mecanic pe care acestea îl poate efectua se numește **energie potențială** și se notează prin E_p . Energia potențială a unui corp de masa m ridicat la o înălțime h în câmpul de gravitație al Pământului față de un anumit nivel considerat nul, este:

$$E_p = mgh. \quad (6)$$

Măsura mișcării și interacțiunii corpurilor, adică suma energiilor cinetice și potențiale ale acestora, se numește **energie mecanică**:

$$E = E_c + E_p. \quad (7)$$

Energia mecanică a unui sistem închis de corpuri în care nu acționează forțe de frecare și de rezistență se conservă (nu variază) în procesul mișcării. Această afirmație se numește legea conservării energiei mecanice. Ea trebuie să se respecte și la rostogolirea unei bile pe ulucul înclinat, adică pe parcursul mișcării ei $E = const$, sau

$$E_1 = E_2, \quad (8)$$

dacă lucrul forței de frecare \vec{F}_r ce acționează din partea ulucului înclinat asupra bilei (*fig. 1*) este cu mult mai mic decât oricare din energiile E_1 sau E_2 în pozițiile x_1 și, respectiv, x_2 . Vom considera că bila este eliberată din punctul cu coordonata x_1 în care aceasta posedă numai energie potențială, adică

$$E_1 = E_p = mgh = mg(x_2 - x_1)\sin\alpha = mg(x_2 - x_1)\frac{H}{x_2}, \quad (9)$$

deoarece $h/(x_2 - x_1) = \sin\alpha$, iar, pe de altă parte, $\sin\alpha = H/x_2$ (*fig. 1*). Valoarea expresiei (9) poate fi calculată după valorile direct măsurabile ale masei bilei m , coordonatelor x_1 și x_2 ale bilei, înălțimii planului înclinat H și valorii cunoscute a

acceleerației gravitaționale $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. În punctul cu coordonata x_2 care se consideră situat la nivelul $h=0$ bila posedă numai energie cinetică, adică energia potențială a bilei în punctul x_1 trece integral în energie cinetică:

$$E_2 = E_c = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}, \quad (10)$$

unde v_c este viteza centrului de masă (de greutate) al bilei, I_c este momentul de inerție al bilei în raport cu axa perpendiculară planului *fig. 1* ce trece prin centrul ei de masă, iar ω este viteza unghiulară a bilei ce se rotește față de axa menționată. Pentru verificarea experimentală a legii conservării energiei este necesar să exprimăm expresia (10), de asemenea, prin mărimi direct măsurabile. Pentru aceasta vom ține seama că ulucul înclinat pe care se rostogolește bila are lățimea $2e$ și vom observa:

1. Momentul de inerție al bilei față de axa ce trece prin centrul ei de masă C conform relației (5) este $I_c = 2mR^2/5$.

2. Viteza unghiulară a bilei $\omega = v_l/r$, unde v_l este viteza liniară a punctelor ce intră în contact cu ulucul, iar r este distanța acestor puncte de la axa de rotație (*fig.*

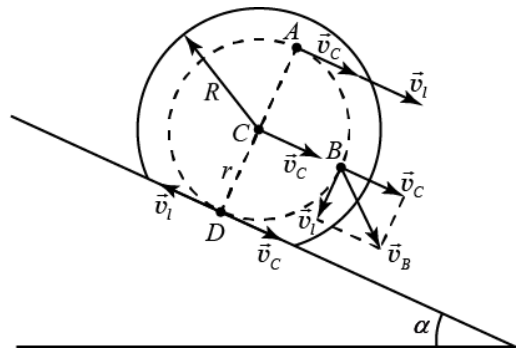


Fig. 2

2). Viteza liniară v_l poate fi determinată reieșind din următoarele raționamente. Orice punct al bilei, inclusiv punctele A , B și D , posedă viteze ale mișcării de translație orientate de-a lungul planului înclinat și egale cu viteza centrului de masă v_c . Totodată, aceste puncte mai posedă și viteze liniare v_l orientate după

tangentele la cercul de raza r . După cum se vede din *fig. 2*, vitezele punctelor A , B și D sunt: $v_A = v_C + v_l$, $v_B = \sqrt{v_C^2 + v_l^2}$, iar $v_D = v_C - v_l$. Dar, punctul D se află în contact cu ulucul și, deci, are viteza ulucului, adică zero: $v_D = v_C - v_l = 0$. De aici rezultă că $v_l = v_C$. Acum expresia (10) poate fi scrisă sub forma:

$$\begin{aligned} E_2 = E_c &= \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} mR^2 \frac{v_l^2}{r^2} \\ &= \frac{mv_C^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} mR^2 \frac{v_C^2}{r^2} = \frac{mv_C^2}{2} \left(1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{R^2}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (10,a)$$

3. Distanța r a punctelor A , B și D de la axa de rotație poate fi determinată din *fig. 3*: $r^2 = R^2 - e^2$, unde e este jumătate din lățimea ulucului.

4. Viteza centrului de masă al bilei, adică viteza mișcării de translație a acesteia, poate fi determinată prin împărțirea distanței egale cu diametrul bilei $2R$ la timpul t_1 , în care bila

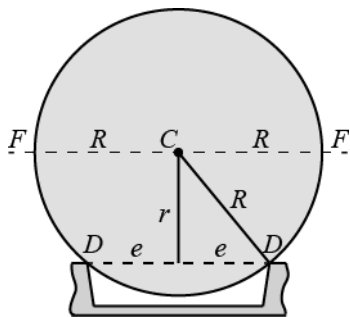


Fig. 3

parcurge această distanță acoperind-o pe linia FF (*fig. 3*): $v_C = 2R/t_1$.

Ținând seama de observațiile 3 și 4, obținem

$$E_2 = E_c = \frac{mv_C^2}{2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - e^2} \right) = \frac{2mR^2}{t_1^2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - e^2} \right). \quad (10,b)$$

Astfel, am exprimat energia cinetică a bilei în punctul x_2 prin mărimi direct măsurabile, ceea ce înseamnă că această energie poate fi calculată după valorile mărimilor măsurate în mod direct, adică măsurată indirect. Aceeași observație este valabilă și pentru energia potențială (9).

Coordonatele bilei x_1 și x_2 precum și înălțimea planului înclinat de la nivelul punctului x_2 pot fi măsurate cu ajutorul unei rigle milimetrice, masa bilei - cu ajutorul unui cântar, diametrul bilei $2R$ și lățimea ulucului $2e$ - cu ajutorul șublerului, iar intervalul de timp t_1 - cu ajutorul cronometrului electronic.

Efectuarea mai multor lucrări de laborator se bazează pe măsurarea intervalelor de timp, în care unul sau două mobile (cărucior, bilă, pendul gravitațional sau elastic,

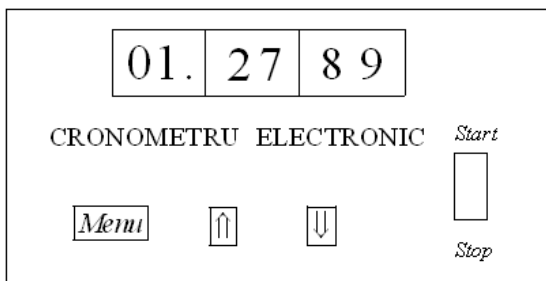


Fig. 4

paralelipiped, taler ș. a.) parcurg anumite distanțe. Aceste intervale de timp se măsoară cu ajutorul cronometrului electronic.

Cronometrul electronic (fig. 4) este destinat pentru măsurarea unui număr de până la $n=99$ intervale consecutive de timp din intervalul $0,0001\text{ s} < t < 99,9999\text{ s}$. La conectarea cronometrului la sursa de alimentare, pe ecranul acestuia apare indicația $-nd$ - care înseamnă că în cronometru nu există date. Dacă dorim să efectuăm o experiență în care se cere un număr de intervale de timp $m=1,2,3,\dots,99$, atunci regimul de măsurare se stabilește cu ajutorul butoanelor **Menu**, \uparrow și \downarrow . Ținând puțin apăsat butonul **Menu**, pe ecran apare indicația $n-1$, care apoi cu ajutorul butoanelor \uparrow și \downarrow se transformă în $n-m$. După aceasta, printr-o apăsare scurtă a butonului **Menu**, trecem cronometrul în regimul de măsurare a celor m intervale de timp, iar pe ecran apare indicația $0--m$. În timpul măsurărilor în locul cifrei 0 apar pe rând cifrele $1,2,3,\dots,m$ care indică care din intervalele de timp considerate este în proces de măsurare.

Când procesul de măsurare a luat sfârșit, pe indicatorul cronometrului apare primul interval de timp măsurat. Pentru a vizualiza și celelalte intervale folosim butoanele \uparrow și \downarrow . De exemplu, apăsând butonul \uparrow , pe ecran apare indicația $n-2$, ceea ce înseamnă că după eliberarea butonului va fi vizualizat intervalul al doilea de timp. În dependență de necesități procesul de măsurare se efectuează cu ajutorul a unui sau doi senzori. Aceștia sunt reglați fiecare aparte și nu pot fi conectați la cronometru decât fiecare la cuibul său, adică senzorul A la cuibul A și senzorul B la cuibul B .

Fiecare senzor (fig. 5) conține câte o sursă S și un receptor R de radiație infraroșie. Sursa radiază

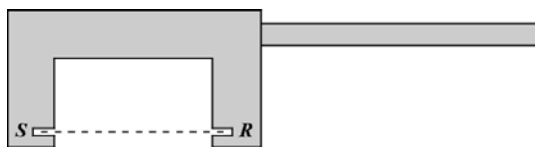


Fig. 5

printr-un orificiu un fascicul îngust de radiație infraroșie care este captat de către receptor. Dacă fasciculul este acoperit (descoperit) de către un corp în mișcare (obturator) se declanșează măsurarea primului interval de timp t_1 . Când obturatorul a trecut și fasciculul cade din nou pe receptor (este acoperit din nou) se declanșează măsurarea celui de-al doilea interval de timp t_2 , care continuă până la o nouă acoperire (descoperire) a fasciculului unuia din senzori (nu

contează care), când procesul de măsurare a intervalului

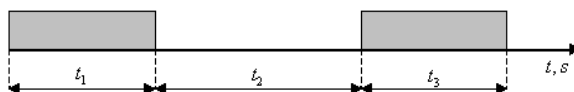


Fig. 6

t_2 se termină și

începe imediat măsurarea timpului de acoperire (descoperire) t_3 . Dacă cronometrul este stabilit în regimul $n-3$, atunci eventualele descoperiri și acoperiri ulterioare ale fasciculului sunt ignorate. Acum în memorie se află intervalele de timp t_1, t_2 și t_3 ,

care cu ajutorul butonului $\hat{\uparrow}$ pot fi vizualizate și trecute în tabele. Pe axa timpului acestea pot fi reprezentate ca și în *fig. 6*.

Cele menționate până acum se referă la regimul manual de măsurare și citire a intervalelor de timp. Există și regimul interfațat calculatorului când intervalele măsurate se transferă la calculator la citirea datelor, unde fiind preluate se procesează după anumite softuri create în acest scop. În acest caz intervalele măsurate se trec în tabele automat, calculându-se totodată valorile mărimilor fizice măsurate indirect, valorile lor medii, erorile standard ale acestora. În caz de necesitate se pot construi și graficele dependențelor studiate, existând posibilitatea determinării erorilor sistematice și excluderii influenței acestora asupra valorilor mărimilor fizice măsurate indirect.

Revenind la legea conservării energiei mecanice (8), observăm că, în cazul studiat ea poate fi scrisă în forma

$$\begin{aligned} E_1 = E_2 &\Rightarrow E_c = E_p \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2mR^2}{t_1^2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - e^2} \right) &= mg(x_2 - x_1) \frac{H}{x_2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Instalația de laborator utilizată permite eliberarea bilei din diferite puncte x_1 ale ulucului înclinat și măsurarea intervalului de timp t_1 în care bila cu secțiunea sa cea mai mare (după linia FF din *fig. 3*) întretaie fasciculul senzorului situat în punctul coordonata fixă x_2 . Astfel, la variația coordonatei x_1 , va varia intervalul de timp t_1 . De aceea această relație poate fi privită ca o funcție liniară de tipul

$$Y = pX + b, \quad (12)$$

unde

$$Y = E_c = \frac{2mR^2}{t_1^2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - e^2} \right), X = E_p = mg(x_2 - x_1) \frac{H}{x_2}. \quad (13)$$

Dependența teoretică (11) arată că valorile pantei și termenului

liber trebuie să fie $p=1$ și, respectiv, $b=0$. Aceasta înseamnă că graficul dependenței teoretice reprezintă o dreaptă ce coincide cu bisectoarea primului cadran. Experimental, acest segment de dreaptă se poate construi efectuând $n \geq 5$ serii a câte $N \geq 10$ măsurări a intervalului de timp t_1 în care bila cu secțiunea de diametru $d = 2R$ întretaie fasciculul senzorului situat în poziția x_2 pe ulucul înclinat. Fiecărei serii îi va corespunde o valoare concretă a coordonatei x_1 a poziției inițiale a bilei. Pentru fiecare serie de măsurări se vor calcula valorile medii ale intervalului de timp \bar{t}_1 , ale energiei cinetice $\bar{Y} = \bar{E}_c$ și ale energiei potențiale $X = E_p$, precum și erorile standard ale mediilor aritmetice comise la măsurarea directă a intervalului de timp t_1 [2]:

$$\Delta_s \bar{t}_1 = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (t_{1i} - \bar{t}_1)^2} \quad (14)$$

și la măsurarea indirectă a energiei cinetice $Y = E_c$:

$$\Delta_s \bar{Y} = \Delta_s \bar{E}_c = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (E_{ci} - \bar{E}_c)^2}, \quad (15)$$

unde N este numărul de măsurări din seria realizată. Din (14) și (15) rezultă că erorile standard $\Delta_s \bar{t}_1$ și $\Delta_s \bar{E}_c$ se micșorează la creșterea numărului de măsurări N din cadrul fiecărei serii. Obținând în acest mod $n \geq 5$ perechi de valori ale energiilor cinetică și potențială pentru $n \geq 5$ valori ale coordonatei bilei x_1 , se poate construi graficul

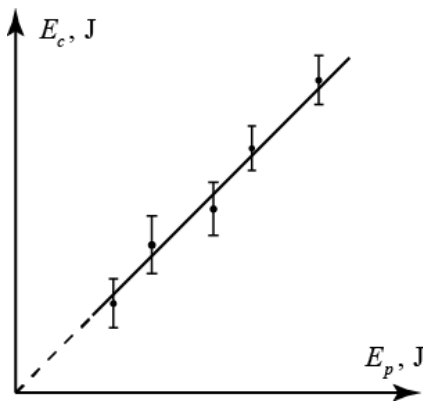


Fig. 7

dependenței liniare (12) (fig. 7) și calcula panta p , dar și termenul liber b ale acesteia utilizând metoda celor mai mici pătrate [2]:

$$p = \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})Y_j}{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}, \quad b = \bar{Y} - p\bar{X}, \quad (16)$$

unde

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j \quad (17)$$

Urmând aceeași metodă, se calculează erorile standard ale pantei și termenului liber [2]:

$$\Delta_s p \approx \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (Y_j - pX_j - b)^2}{(n-1) \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}}, \quad (18)$$

$$\Delta_s b \approx \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2} \right) \frac{\sum_{j=1}^n (Y_j - pX_j - b)^2}{n-1}}.$$

Toate calculele mărimilor $\Delta_s \bar{t}_1$, $\Delta_s \bar{E}_c$, p , b , \bar{X} , \bar{Y} , $\Delta_s p$ și $\Delta_s b$ se efectuează la calculator urmând softul elaborat, dar pot fi realizate și manual. Rezultatul final se scrie în forma

$$p \pm \Delta_s p; b \pm \Delta_s b \quad (19)$$

pentru nivelul de încredere $P^* = 0,683$ și în forma

$$p \pm t(P^*, k) \cdot \Delta_s p; b \pm t(P^*, k) \cdot \Delta_s b \quad (20)$$

pentru un alt nivel de încredere P^* (la indicația profesorului) [2]. Valabilitatea legii conservării energiei (11) în procesul de rostogolire a bilei pe ulucul înclinat se va considera ca și confirmată experimental, dacă graficul funcției (12) construit după

punctele experimentale va reprezenta un segment de dreaptă, iar valoarea teoretică a pantei acestei drepte $p_{teor} = 1$ va rezulta inclusă în intervalul de încredere (20) pentru nivelul de încredere $P^* = 0,999$.

Trebuie observat că dependența teoretică (11) poate fi influențată de unele fenomene ce n-au fost luate în seamă în modelul analizat. Această dependență poate fi afectată și de aproximația utilizată la determinarea vitezei instantanee a centrului de masă al bilei $v_c = 2R/t_1$. În legătură cu aceste aspecte se impune analiza limitelor de aplicabilitate ale relației obținute (11):

1. După cum am menționat mai devreme, pentru ca legea conservării energiei mecanice să se respecte trebuie ca lucrul forței de frecare de rostogolire \vec{F}_r să fie cu mult mai mic decât fiecare din energiile E_c sau E_p . Forța de frecare de rostogolire \vec{F}_r este aplicată în punctele D ale bilei (*fig. 3*) ce intră în contact cu ulucul. Viteza instantanee a acestor puncte este egală cu zero. De aceea forța de frecare de rostogolire nu efectuează lucru mecanic și, deci, nu modifică valoarea energiei cinetice a bilei în mișcarea ei de rostogolire. Forța de frecare de rostogolire \vec{F}_r este o forță de frecare de repaus și rolul ei se reduce la aducerea bilei în mișcare de rostogolire pură. În prezența forței de frecare de rostogolire lucrul forței de greutate se consumă pentru mărirea energiei cinetice nu numai a mișcării de translație, ci și a celei de rotație. Vom observa că forța de reacțiune a planului înclinat \vec{N} , fiind perpendiculară pe direcția mișcării, de asemenea, nu efectuează lucru mecanic. Aceste raționamente însă sunt valabile numai, dacă, atât bila, cât și ulucul sunt absolut rigide. Întrucât corpurile reale nu pot fi absolut rigide, devine clar că la rostogolirea bilei atât ulucul, cât și bila se deformează puțin, ceea ce conduce la efectuarea de către forța de frecare de rostogolire a unui lucru mecanic negativ L_{fr} și relația (11) în cazul real trebuie să aibă aspectul:

$$\frac{2mR^2}{t_1^2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - e^2} \right) = mg (x_2 - x_1) \frac{H}{x_2} + L_{fr}. \quad (21)$$

Rămâne de investigat cât de mult acest lucru influențează valoarea energiei cinetice a bilei în starea finală. Comparând (21) cu (12), observăm că $L_{fr} = b$. Procesarea datelor experimentale ne va arăta valoarea termenului liber b precum și eroarea standard Δb a acestuia. Pot exista două cazuri:

a) $|\Delta b| \geq b$. În acest caz vom putea trage concluzia că dreapta (12) în limitele erorilor experimentului trece prin originea de coordonate după cum o cere dependența teoretică (11), iar lucrul forței de frecare de rostogolire poate fi neglijat, valoarea lui fiind de ordinul erorilor comise în experiment. La verificarea relației $\Delta b \geq b$ trebuie să ținem seama de faptul că valoarea erorii standard Δb se calculează cu ajutorul softului propus pentru nivelul de încredere $P^* = 0,683$. Pentru un nivel de încredere mai ridicat, de exemplu, $P^* = 0,999$, eroarea standard va fi $\Delta b \cdot t(0,999, k)$, unde $k = n - 1$, n fiind numărul de serii de măsurări. Valoarea coeficientului $t(0,999, k)$ pentru diferite valori ale numărului k se determină din tabelul acestei mărimi.

b) $|\Delta b| < b$ pentru nivelul de încredere $P^* = 0,999$. În acest caz vom putea concluziona că lucrul forței de frecare de rostogolire este mai mare decât erorile comise în experiment, acesta putând fi măsurat indirect ca diferența energiilor cinetică și potențială:

$$\frac{2mR^2}{t_1^2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - e^2} \right) - mg (x_2 - x_1) \frac{H}{x_2} = L_{fr} \quad (22)$$

Dar, $L_{fr} = F_{fr} (x_2 - x_1) \cos \pi = -F_{fr} (x_2 - x_1)$, unde

$F_{fr} = \mu_r N = \mu_r mg \cos \alpha = \mu_r mg \sqrt{1 - \frac{H^2}{x_2^2}}$, iar μ_r este coeficientul

de frecare de rostogolire. Acum relația (22) poate fi scrisă în forma

$$\begin{aligned}
 & mg(x_2 - x_1) \frac{H}{x_2} - \frac{2mR^2}{t_1^2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - e^2} \right) = \\
 & = \mu_r mg(x_2 - x_1) \sqrt{1 - \frac{H^2}{x_2^2}}.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Și această relație este o funcție liniară de tipul (12), adică $Y_1 = p_1 X_1 + b_1$, unde

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= mg(x_2 - x_1) \frac{H}{x_2} - \frac{2mR^2}{t_1^2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - e^2} \right), \\
 X_1 &= mg(x_2 - x_1) \sqrt{1 - \frac{H^2}{x_2^2}},
 \end{aligned} \tag{24}$$

iar $p_1 = \mu_r$ și $b_1 = 0$. Astfel, în cazul când $\Delta b < b$ pentru $P^* = 0,999$, construind după punctele experimentale graficul dependenței mărimii Y_1 de mărimea X_1 , se poate determina panta dreptei obținute, care coincide cu coeficientul de frecare de rostogolire.

2. Expresia (11) pentru legea conservării energiei mecanice a fost obținută în presupunerea că bila se rostogolește pe ulucul înclinat fără alunecare. Dar, alunecarea bilei depinde de valoarea forței de frecare de rostogolire care, după cum se va vedea mai târziu în lucrarea de laborator 5c [3], este o forță de frecare de repaus ce crește odată cu creșterea unghiului de înclinare α a planului față de orizontală:

$$F_\tau = \frac{2mR^2 g}{7R^2 - 5e^2} \sin \alpha. \tag{25}$$

Alunecarea bilei nu se va produce atâta timp cât forța de frecare de rostogolire va fi mai mică decât forța de frecare la alunecare:

$$F_\tau < F_{fr} = \mu N = \mu mg \cos \alpha. \tag{26}$$

În cazul când $F_\tau \geq F_{fr}$, rostogolirea bilei pe uluc va fi însoțită de alunecarea acesteia și relația (11) nu va mai fi valabilă. Astfel,

unghiurile de înclinare ale planului față de orizontală pentru care legea conservării energiei mecanice (11) este valabilă, după cum rezultă din formulele (25) și (26) trebuie să satisfacă condiția:

$$F_{\tau} < F_{fr} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha < \frac{\mu(7R^2 - 5e^2)}{2R^2} = \operatorname{tg} \alpha_{\max}, \quad (27)$$

unde α_{\max} este unghiul de înclinare al ulucului față de orizontală pentru care începe alunecarea bilei. Ulucul utilizat în instalația de laborator are lățimea $2e \approx 7 \text{ mm}$. Luând o bilă de oțel cu raza $R = 11 \text{ mm}$ și coeficientul de frecare la alunecare al oțelului pe o suprafață de oțel $\mu \approx 0,2$ (valoare tabelară), pentru unghiul maxim de înclinare al planului, obținem valoarea $\alpha_{\max} \approx 33^\circ$. Întrucât ulucul director din instalația utilizată este înclinat sub unghiul $\alpha \approx 45^\circ$, pentru verificarea experimentală a legii conservării energiei mecanice trebuie să utilizăm bile din material ce se caracterizează printr-un coeficient mare de frecare la alunecare. În lucrare se utilizează o bilă de metal acoperită cu un strat de gumă. Coeficientul de frecare la alunecarea gumei pe o suprafață de oțel este $\mu \approx 0,8$ (valoare tabelară), pentru unghiul α_{\max} obținându-se $\alpha_{\max} \approx 69^\circ$. Deci, pentru astfel de bile unghiul de înclinare al ulucului față de orizontală $\alpha \approx 45^\circ$ este destul de potrivit pentru verificarea legii conservării energiei mecanice.

3. La mișcarea uniform accelerată de translație ($a = \text{const.}$) a oricărui corp viteza lui medie pe o anumită distanță d coincide cu viteza instantanee a acestuia în mijlocul intervalului de timp t , în care corpul parcurge această distanță:

$$v_{\text{med}} = \frac{d}{t} = \frac{v_0 t + at^2/2}{t} = v_0 + a \cdot \frac{t}{2}, \quad (28)$$

unde v_0 este viteza inițială a corpului.

După cum se va demonstra în lucrarea de laborator 5c [3], rostogolirea fără alunecare a bilei pe ulucul înclinat conduce la o mișcare uniform accelerată de translație cu accelerația

$$a = g \frac{5(R^2 - e^2)}{7R^2 - 5e^2} \sin \alpha, \quad (29)$$

ceea ce înseamnă că formula (28) poate fi aplicată și la rostogolirea bilei:

$$\frac{d}{t_1} = v_0 + a \cdot \frac{t_1}{2}, \quad (30)$$

unde t_1 este intervalul de timp în care bila cu secțiunea de diametru $d = 2R$ întretaie fasciculul senzorului, iar v_0 este viteza bilei în momentul începerii acoperirii fasciculului senzorului de către aceasta. Pentru a putea măsura coordonata x_2 a bilei în starea finală vom aproxima viteza instantanee v în mijlocul intervalului de timp t_1 , adică viteza medie pe distanța d , cu viteza v_M în punctul M ce coincide cu mijlocul distanței parcurse d . Dar, conform formulei lui Galilei,

$$v_M^2 - v_0^2 = ad. \quad (31)$$

Din relațiile (30) și (31) rezultă că

$$\begin{aligned} v_M^2 &= v_0^2 + ad = \left(\frac{d}{t_1} - \frac{at_1}{2} \right)^2 + ad = \frac{d^2}{t_1^2} \left(1 + \frac{a^2 t_1^4}{4d^2} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow v_M &= v \sqrt{1 + \frac{a^2 t_1^4}{4d^2}} = v \sqrt{1 + \frac{a^2 t_1^4}{16R^2}}. \end{aligned} \quad (32)$$

De aici rezultă că aproximația $v_{med} \approx v_M$ utilizată la deducerea relației (11) poate fi aplicată, dacă $a^2 t_1^4 / (16R^2) \ll 1$ sau dacă

$$t_1 \ll 2 \sqrt{\frac{R}{a}}. \quad (33)$$

În acest caz se va comite o eroare relativă

$$\varepsilon = \frac{|v - v_M|}{v} = \left| 1 - \frac{v_M}{v} \right| = \left| 1 - \sqrt{1 + \frac{a^2 t_1^4}{16R^2}} \right|. \quad (34)$$

Luând $R = 11 \text{ mm}$, $e = 3,5 \text{ mm}$, $\alpha \approx 45^\circ$ și $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, pentru accelerația bilei se obține $a \approx 4,8 \text{ m/s}^2$, iar pentru intervalele de timp măsurate - condiția $t_1 \ll 0,1 \text{ s}$. Experiența arată că, la rostogolirea bilei din punctul cu coordonata $x_1 \approx 10 \text{ cm}$, bila întretaie fasciculul senzorului cu secțiunea de diametrul $d = 2R$ în intervalul de timp $t_1 = 0,02 \text{ s}$ care este de aproximativ 10 ori mai mic decât cel estimat cu ajutorul relației (33). Substituind această mărime în (34) obținem o eroare relativă $\varepsilon \approx 0,001$, adică $\varepsilon_M \approx 0,1\%$. Astfel, această eroare, care intervine ca o eroare sistematică de metodă, pentru obturatorul cu grosimea $d = 0,022 \text{ m}$ este, după cum se va vedea în rezultatul procesării datelor experimentale, cu mult mai mică decât erorile întâmplătoare comise în experiment, poate fi neglijată.

Fișa de lucru

1. Porniți cronometrul electronic și calculatorul. Accesați programul pentru achiziția datelor și efectuarea lucrării de laborator, completați foaia de titlu. Cu ajutorul butonului „**Continuare**” deschideți fereastra „**Caracteristicile lucrării**” și analizați conținutul acesteia. Completați compartimentele „**Scopul lucrării**”, „**Aparate și accesorii**”. Accesând butonul „**Continuare**” ajungeți la fereastra „**Efectuarea măsurărilor**”. Selectați numărul de serii $n \geq 5$ și numărul de măsurări $N \geq 7$ din cadrul fiecărei serii (la indicația profesorului) și introduceți-le în calculator.
2. Cu ajutorul cântarului determinați masa bilei m , iar cu ajutorul șublerului - diametrul bilei $2R$ și lățimea ulucului $2e$. Cu ajutorul riglei milimetrice determinați coordonata x_2 a poziției finale a bilei ce coincide cu poziția fasciculului senzorului cronometrului electronic. Pentru aceasta stabiliți bila pe uluc astfel încât marginea ei să declanșeze măsurarea timpului. Citind pe riglă coordonata marcajului (cercului tehnic) de pe

- bilă și adăugând la ea raza bilei, determinați coordonata x_2 . Cu ajutorul nivelmetrului și riglei milimetrice determinați și înălțimea ulucului înclinat H față de nivelul punctului de coordonata x_2 . Introduceți toate aceste mărimi în calculator. Măsurarea mărimilor amintite poate fi omisă, dacă se cunosc valorile acestora măsurate anticipat.
3. Cu ajutorul mecanismului de eliberare a bilei, stabiliți bila într-o astfel de poziție x_1 pe ulucul înclinat, încât ulterior să mai poată fi selectate încă $n-1$ poziții ale acesteia cu pasul 1-2 cm. Introduceți coordonata x_1 în calculator.
 4. Accesați butonul „**Start**” și eliberați bila. Dacă mișcarea bilei a avut loc în condiții satisfăcătoare, accesați butonul „**Citirea datelor**” și transferați la calculator intervalul de timp t_1 . În caz contrar accesați butonul „**Restart**” și repetați măsurarea. Mișcarea în condiții satisfăcătoare se consideră acea mișcare care nu prezintă abateri de la ulucul director, precum și mișcarea urmată de eliberarea defectuoasă a bilei din poziția x_1 .
 5. Repetați indicațiile de la p. 4 încă de $N-1$ ori, analizați cele N valori măsurate ale intervalului de timp t_1 , valorile medii \bar{t}_1 și \bar{E}_c , precum și valorile erorilor standard ale mediilor aritmetice ale acestor mărimi. La indicația profesorului, verificați manual calculele uneia sau ambelor erori standard $\Delta_s \bar{t}_1$ și $\Delta_s \bar{E}_c$ cu ajutorul formulelor (14) și, respectiv, (15). În cazul depistării unor abateri substanțiale ale valorilor intervalului de timp t_1 de la valoarea medie \bar{t}_1 sau a unor valori exagerat de mari ale erorilor $\Delta_s \bar{t}_1$ și $\Delta_s \bar{E}_c$, inițiați efectuarea lucrării de la început.
 6. Selectați o altă poziție x_1 a bilei, introduceți-o în calculator și efectuați o altă serie de măsurări, repetând indicațiile de la punctele 4 și 5.
 7. Repetați indicațiile de la p. 6 încă de $n-2$ ori.

8. După terminarea celor n serii de măsurări accesați butonul „**Continuare**” și ajungeți la fereastra „**Procesarea datelor experimentale**”.
9. Accesați butonul „**Accept**” la punctul „**Prelucrarea datelor experimentale**” și obțineți graficul dependenței studiate, valoarea pantei acesteia p și valoarea termenului liber b . La indicația profesorului verificați manual calculele mărimilor p și b cu ajutorul formulelor (16) și (17).
10. Accesați butonul „**Accept**” la punctul „**Calculul erorilor**” și obțineți eroarea standard a pantei dreptei Δp și a termenului liber Δb pentru nivelul de încredere $P^* = 0,683$. La indicația profesorului, verificați în mod tradițional calculele mărimilor Δp și Δb cu ajutorul formulelor (18).
11. Calculați manual aceste erori și pentru un alt nivel de încredere indicat de profesor.
12. Introduceți rezultatul final în forma unui interval de încredere (19) și (20).
13. Accesați butonul „**Accept**” la punctul „**Concluzii**” și în fereastra apărută formulați concluziile la lucrare. Formularea concluziilor se va considera ca și lucrul pentru acasă. Concluziile trebuie să conțină:
 - afirmații privind valabilitatea legii verificate experimental prin metoda celor mai mici pătrate cu indicarea nivelului de încredere pentru care se poate sau nu se poate considera legea verificată drept valabilă;
 - afirmații privind valoarea lucrului forței de frecare de rostogolire în comparație cu erorile întâmplătoare comise în experiment (analiza unuia din cazurile $\Delta b \geq b$ sau $\Delta b < b$ realizat în experiment);
 - afirmații privind posibilitatea sau imposibilitatea determinării cu ajutorul instalației utilizate a coeficientului de frecare de rostogolire;
 - afirmații privind limitele de aplicabilitate a expresiei verificate după unghiuri de înclinare ale ulucului și după valorile coeficientului de frecare la alunecare;

- afirmații privind eroarea sistematică introdusă de metoda acceptată de măsurare a intervalului de timp în care bila întretaie fasciculul senzorului;
 - afirmații privind prezența sau absența alunecării bilei în procesul de rostogolire pe ulucul înclinat;
 - propuneri privind utilizarea altor metode de cercetare decât cele utilizate la realizarea lucrării.
14. Accesați butonul „**Referat**” și inițiați programul de perfectare a referatului. Salvați referatul.
 15. Accesați butonul „**Finiș**” și finalizați efectuarea lucrării de laborator. Oprii cronometrul și calculatorul.

Întrebări de control

1. Definiți mișcările de translație și de rotație, noțiunile de viteză și viteză unghiulară, noțiunile de masă și de moment de inerție, noțiunea de energie cinetică a corpului în cazurile mișcării de translație și de rotație, noțiunea de energie potențială și energie mecanică.
2. Care sunt expresiile pentru energiile cinetice ale corpului la mișcarea de translație și cea de rotație?
3. Cu ajutorul cărei formule se calculează momentul de inerție al unui sistem de puncte materiale? Cum se calculează momentul de inerție al unui corp cu o distribuție continuă a masei sale?
4. Care este formula de calcul a momentului de inerție a unei bile omogene față de axa ce coincide cu unul din diametrele sale?
5. Formulați legea conservării energiei mecanice.
6. Cum se determină viteza unghiulară a bilei la rostogolirea acesteia în lipsa alunecării?
7. Care este viteza liniară a punctelor bilei ce intră în contact cu ulucul la rostogolire și de ce?
8. La ce distanță de la axa de rotație se află punctele ce intră în contact cu ulucul la rostogolirea bilei?
9. Cum se determină în lucrare viteza centrului de masă al bilei?
10. Ce mărimi se măsoară în mod direct în experiment?

11. Care este principiul de funcționare a cronometrului electronic? În ce regimuri poate funcționa?
12. Câte intervale consecutive de timp se pot măsura cu ajutorul cronometrului electronic și cât de mari pot fi acestea?
13. Din ce este constituit un senzor al cronometrului electronic?
14. Cum se exprimă legea conservării energiei mecanice în experiență prin mărimi direct măsurabile?
15. Ce dependență matematică se utilizează la verificarea legii conservării energiei mecanice în experiență?
16. Câte serii de măsurări și câte măsurări în cadrul fiecărei serii trebuie realizate și de ce?
17. Care sunt formulele de calcul a erorilor standard $\Delta_s \bar{t}_1$ și $\Delta_s \bar{E}_c$ ale mediilor aritmetice ale intervalului de timp măsurat în cadrul seriei și energiei cinetice? Cărui nivel de încredere îi corespund aceste erori?
18. Care sunt valorile teoretice ale pantei dreptei p și a termenului liber b ?
19. Ce metodă se utilizează la construirea graficului experimental al dependenței energiei cinetice a bilei în starea finală de energia potențială în starea inițială și în ce constă ea?
20. Cum se calculează valorile experimentale ale pantei dreptei p și ale termenului liber b ?
21. De ce valorile experimentale ale pantei drepte și termenului liber se obțin $p \neq 1$ și $b \neq 0$?
22. Cum se scrie rezultatul final pentru diferite nivele de încredere?
23. Când se consideră că legea conservării energiei mecanice este verificată în experiment?
24. De ce pentru o bilă și un uluc absolut rigide lucrul forței de frecare de rostogolire este egal cu zero? De ce pentru o bilă și un uluc real acest lucru este diferit de zero?
25. Ce înseamnă $\Delta b \geq b$?
26. Ce înseamnă $\Delta b < b$?
27. În ce condiții ar putea fi determinat coeficientul de frecare de rostogolire și prin ce metodă?

28. În ce condiții rostogolirea bilei nu este însoțită de alunecare?
29. Pentru ce unghiuri de înclinare a ulucului director rostogolirea nu va fi însoțită de alunecare?
30. De ce expresia pentru legea conservării energiei mecanice obținută în lucrare nu este valabilă pentru cazul rostogolirii cu alunecare a bilei pe ulucul director?
31. Ce aproximație se utilizează la determinarea vitezei mișcării de translație a bilei în starea finală și la ce erori conduce? În ce condiții acestea pot fi neglijate?

Bibliografie

1. A. Rusu, S. Rusu. Ciclu de prelegeri. **I. Bazele mecanicii clasice**. Chișinău, Edit. "Tehnica-UTM", 2014, 130 p.
2. A. Rusu, S. Rusu, C. Pîrțac. Prelucrarea datelor experimentale. Îndrumar de laborator la fizică. Chișinău, Secția Redactare și Editare a U.T.M., 2012.
3. A. Rusu, S. Rusu, C. Pîrțac. Lucrări de laborator la mecanică asistate de calculator. Îndrumar de laborator la fizică. Chișinău, Secția Redactare și Editare a U.T.M., 2012.