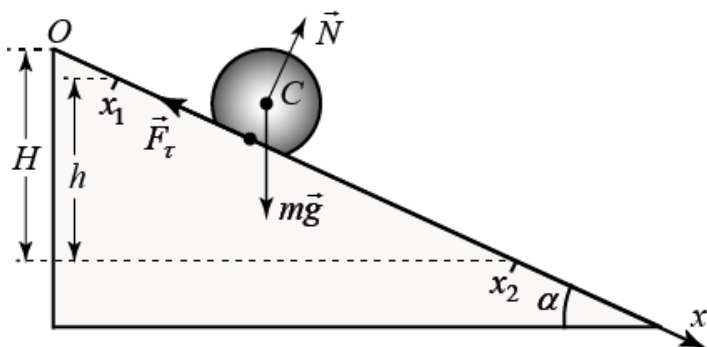


ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ МОЛДОВЫ

ВВОДНАЯ ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

Проверка закона сохранения механической энергии при скатывании шара с наклонной ПЛОСКОСТИ

Методические указания к лабораторному практикуму по
физике



Chişinău
2016

**ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ МОЛДОВЫ
ФАКУЛЬТЕТ ИНЖЕНЕРИИ И
МЕНЕДЖМЕНТА В ЭЛЕКТРОНИКЕ И
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЯХ
КАФЕДРА ФИЗИКИ**

ВВОДНАЯ ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

Проверка закона сохранения механической энергии при скатывании шара с наклонной плоскости

**Методические указания к лабораторному практикуму по
физике**

**Chişinău
Editura „Tehnica-UTM”
2016**

Методические указания разработаны в соответствии с учебной программой по физике для Технического университета Молдовы. В каждой лабораторной работе сформулированы цель и задачи работы и последовательно изложен теоретический материал по изучаемой теме. Кроме того, во всех работах сформулированы контрольные вопросы, ответы на которые требуют необходимого минимума знаний для допуска к выполнению лабораторных работ. Методические указания предназначены для студентов всех специальностей дневной и заочной форм обучения.

Авторы: конференциар, д-р А.Русу
старший преподаватель К. Пырцак
старший преподаватель С. Гутюм
конференциар, д-р К.Шербан
лектор унив. А. Попович

Рецензент – конференциар, д-р С.Русу

Вводная лабораторная работа

Экспериментальная проверка закона сохранения энергии при скатывании шара по желобу с наклонной плоскости

Цель работы: Экспериментальная проверка закона сохранения механической энергии при скатывании шара по желобу с наклонной плоскости.

Задачи: В результате выполнения работы студенты должны уметь:

- формулировать понятия поступательного и вращательного движения, линейной и угловой скорости, массы и момента инерции, кинетической энергии поступательного и вращательного движения, потенциальной энергии, механической энергии;
- формулировать закон сохранения механической энергии;
- выводить формулы для момента инерции и кинетической энергии шара, совершающего вращательное движение;
- использовать электронный секундомер для измерения интервалов времени как в ручном режиме, так и при компьютерной обработке данных;
- экспериментально получать график зависимости

величины $Y = E_{\kappa} = \frac{2mR^2}{t_1^2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - e^2} \right)$ от величины

$X = E_n = mg(x_2 - x_1)H/x_2$ и показывать, что она является отрезком прямой с тангенсом угла наклона $p = 1$;

- оценивать допущенные стандартные погрешности при прямом измерении промежутка времени и косвенного измерения кинетической энергии, тангенса угла наклона прямой и свободного члена;
- анализировать полученные результаты и делать выводы относительно справедливости закона сохранения

механической энергии при скатывании шара по желобу с наклонной плоскости для различных доверительных вероятностей.

Материалы и принадлежности: компьютер с программным обеспечением обработки экспериментальных данных и СОМ–портом, электронный секундомер, сенсор, наклонная плоскость с желобом, шар, весы, штангенциркуль, миллиметровая линейка.

Изучить: гл. 5 из [1].

Теоретические расчеты и эксперимент

Движение тела называется поступательным, если любая прямая, связанная с ним, перемещается в процессе движения параллельно своему первоначальному направлению.

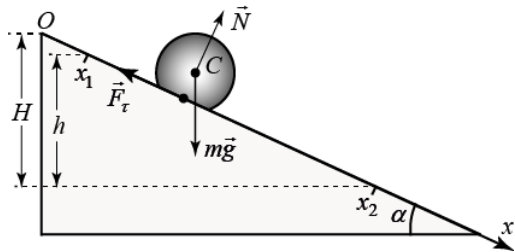


Рис. 1

Вращательным называется движение тела, при котором все его точки описывают окружности, центры которых лежат на прямой, называемой осью вращения. При скатывании с наклонной плоскости (рис.1) шар принимает участие в поступательном движении с линейной скоростью v_C центра масс C и вращательном движении относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости рис.1. Каждому виду движения соответствует своя кинетическая энергия. **Кинетической энергией называется мера движения тела, равная механической работе, которую оно может совершить до полной остановки.** Как показывают расчеты, основанные на этом определении (см. [1]),

кинетическая энергия тела массой m , совершающего поступательные движения со скоростью v (мера поступательного движения), равна:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (1)$$

Под массой тела m понимается **его мера инертности**, т.е. величина, которая определяет свойство тел сопротивляться изменению скорости. Скорость тела v равна расстоянию S , пройденному им за единицу времени. Поскольку при вращательном движении положение тела определяется с помощью угла поворота φ , то быстрота изменения его положения описывается с помощью угловой скорости ω , равной углу поворота тела за единицу времени. Таким образом, кинетическая энергия тела, совершающего вращательное движение, по аналогии с предыдущей формулой ($v \rightarrow \omega, m \rightarrow I$), может быть записана в виде

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (2)$$

где через I обозначена физическая величина, являющаяся мерой инертности тела при вращательном движении. Она называется **моментом инерции**, которая не является массой, как в случае поступательного движения, а величиной, зависящей как от массы тела, так и от ее распределения относительно оси вращения [1]:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (3)$$

Таким образом, момент инерции тела относительно какой-либо оси вращения равен сумме произведений масс m_i материальных точек этого тела на квадраты их расстояний r_i^2 до рассматриваемой оси. В случае непрерывного распределения массы тела, знак суммы в формуле (3) переходит в знак интеграла [1]:

$$I = \int_{(v)} r^2 dm, \quad (4)$$

где dm – масса бесконечно малого элемента тела, а V – его объем.

Можно показать (см. [1]) что момент инерции однородного шара массой m и радиуса R относительно оси, совпадающей с одним из его диаметров, равен:

$$I = \frac{2}{5} mR^2. \quad (5)$$

Отметим, что наряду с фундаментальным свойством тел двигаться, свойством, которое описывается с помощью физической величины, называемой кинетической энергией, тела обладают еще свойством взаимодействовать между собой. Мера взаимодействия тел, равная механической работе, которую они могут совершить, называется **потенциальной энергией**; она обозначается E_n . Потенциальная энергия тела массой m , поднятого в гравитационном поле Земли на высоту h относительно некоторого нулевого уровня, равна:

$$E_n = mgh. \quad (6)$$

Мера движения и взаимодействия тел, т.е. суммы их кинетических и потенциальных энергий называется механической энергией:

$$E = E_k + E_n. \quad (7)$$

Механическая энергия замкнутой системы тел, в которой не действуют силы трения и сопротивления, сохраняется (не изменяется) в процессе движения. Это утверждение называется *законом сохранения механической энергии*. Он должен выполняться и при скатывании шара с наклонной плоскости, т.е. в процессе его движения $E = const$, или

$$E_1 = E_2, \quad (8)$$

если работа силы трения \vec{F}_τ , действующей на шар со стороны наклонной плоскости (рис. 1), гораздо меньше энергий E_1 и E_2 ,

соответственно в точках x_1 и x_2 . Будем считать, что шар освобождается ($v = 0$) в точке с координатой x_1 , в которой он обладает только потенциальной энергией, т.е.

$$E_1 = E_n = mgh = mg(x_2 - x_1) \sin \alpha = mg(x_2 - x_1) \frac{H}{x_2}, \quad (9)$$

поскольку $h/(x_2 - x_1) = \sin \alpha$, с другой стороны, $\sin \alpha = H/x_2$ (рис. 1). Численное значение выражения (9) можно вычислить, непосредственно измерив массу шара m , координаты x_1 и x_2 , высоту наклонной плоскости H и зная величину ускорения свободного падения $g = 9,81 \text{ м/с}^2$. В точке с координатой x_2 , расположенной на уровне $h = 0$, шар обладает только кинетической энергией, т.е. потенциальная энергия, которой обладал шар в точке x_1 , **полностью превращается** в кинетическую:

$$E_2 = E_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2}, \quad (10)$$

где v_c – скорость центра масс (тяжести) шара, I_C – момент инерции шара относительно оси, перпендикулярной плоскости рис.1 и проходящей через его центр масс C , а ω – угловая скорость вращения шара относительно указанной оси. Для экспериментальной проверки закона сохранения энергии необходимо формулу (10) также выразить через непосредственно измеряемые величины. Для этого принимаем во внимание, что ширина желоба наклонной плоскости, с которой скатывается шар, равна $2e$. Кроме того:

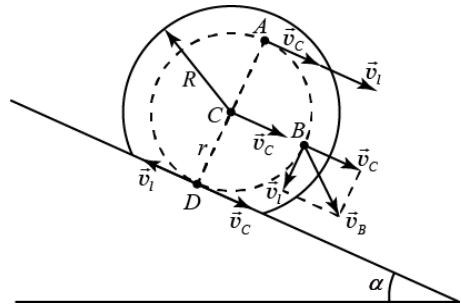


Рис2.

1. Момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр масс C , согласно выражению (5), равен $I_C = 2mR^2/5$.

2. Угловая скорость шара $\omega = v_n/r$, где v_n – линейная скорость точек, соприкасающихся с желобом, r – расстояние от этих точек до оси вращения (рис. 2). Линейная скорость v_n может быть определена из следующих соображений. Любая точка шара, в том числе точки A , B и D , имеет скорость поступательного движения, направленную вдоль наклонной плоскости и равную скорости центра масс \vec{v}_C . Кроме того, эти точки имеют еще линейные скорости v_n , направленные по касательным к окружности радиуса r . Как видно из рис. 2, скорости A , B и D равны:

$v_A = v_C + v_n$, $v_B = \sqrt{v_C^2 + v_n^2}$, а $v_D = v_C - v_n$. Но желоб соприкасается с окружностью радиуса r в точке D , поэтому $v_D = 0$ (скорость желоба равна 0), следовательно:

$$v_D = v_C - v_n = 0 \Rightarrow v_n = v_C.$$

Теперь выражение (10) может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} E_2 = E_k &= \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} mR^2 \frac{v_C^2}{r^2} = \\ &= \frac{mv_C^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} mR^2 \frac{v_C^2}{r^2} = \frac{mv_C^2}{2} \left(1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{R^2}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (10, a)$$

3. Расстояние r от точек A , B и D до оси вращения может быть определено как $r^2 = R^2 - e^2$, где e – половина ширины желоба (рис. 2,3).

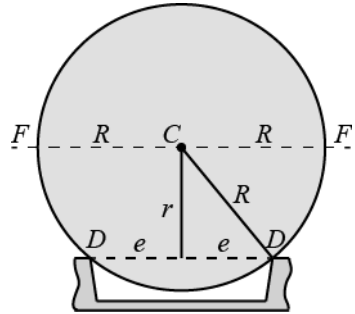


Рис. 3

4. Скорость центра масс шара, т.е. скорость его поступательного движения, равна $v_c = 2R/t_1$, где t_1 – время, за которое шар проходит расстояние, равное диаметру шара $2R$.

Приняв во внимание п.п. 3 и 4, окончательно получим:

$$E_2 = E_k = \frac{mv_c^2}{2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - e^2} \right) = \frac{2mR^2}{t_1^2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - e^2} \right). \quad (10, b)$$

Таким образом, мы выразили кинетическую энергию шара в точке x_2 через непосредственно измеряемые величины, а это означает, что она может быть вычислена по значениям величин, полученных прямым измерением, т.е. измерена косвенным образом. Это же замечание справедливо и для потенциальной энергии (9).

Координаты точек x_1 и x_2 , а также высота наклонной плоскости на уровне точки x_2 , могут быть измерены с помощью миллиметровой линейки, масса шара – с помощью весов, диаметр шара $2R$ и ширина желоба $2e$ – штангенциркулем, а промежуток времени t_1 – электронным хронометром.

При выполнении ряда лабораторных работ необходимо измерять промежутки времени, за

которые один или два объекта (тележка, шар, математический или пружинный маятник, параллелепипед, чаша весов и т.д.) проходят определенные расстояния. Эти промежутки времени измеряются электронным секундомером.

Электронный секундомер (рис. 4) предназначен для измерения до $n = 99$ промежутков времени из интервала $0,0001 \text{ с} < t < 99,9999 \text{ с}$. При присоединении секундомера к

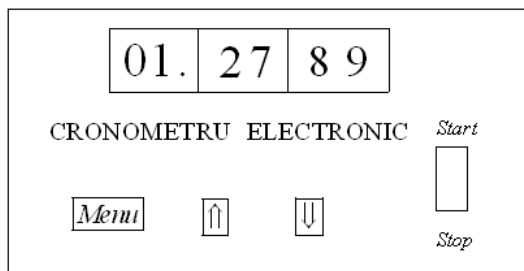


Рис. 4

источнику питания на экране высвечивается $-nd-$, это означает, что в секундомере нет данных. Если мы хотим выполнить эксперимент, в котором необходимо измерить $m=1,2,3,\dots,99$ промежутков времени, то режим измерения устанавливается с помощью кнопок **Menu**, \uparrow или \downarrow . Если немного придержать кнопку **Menu**, то на экране высветится $n-1$, которое затем с помощью кнопок \uparrow и \downarrow превращается в $n-m$. Затем кратким нажатием на кнопку **Menu** переводим секундомер в режим измерения заданных промежутков времени, при этом на экране высвечивается $0-m$. Во время измерений вместо цифры 0 поочередно появляются цифры $1,2,3,\dots,m$, которые показывают, какой из рассматриваемых промежутков времени измеряется.

Когда процесс измерения завершается, на экране секундомера появляется первый измеренный промежуток времени. Чтобы увидеть и остальные промежутки времени, используем кнопки \uparrow и \downarrow . Например, при нажатии на кнопку \uparrow , на экране появляется показание $n-2$, это означает, что после освобождения кнопки станет виден второй промежуток времени. Измерение промежутков времени в зависимости от потребностей может осуществляться с помощью одного или двух сенсоров (A и B). Каждый из них настраивается незави-

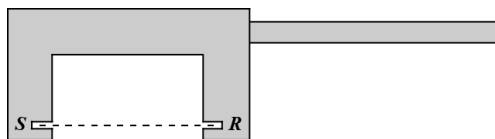


Рис. 5

симо и подключается к своему гнезду секундомера A или B , соответственно. Каждый сенсор (рис. 5) содержит источник S и приемник R инфракрасного излучения. Источник испускает узкий пучок инфракрасного излучения, который улавливается приемником. Если пучок перекрыт (открыт) движущимся телом (затвором), то запускается измерение первого промежутка времени t_1 . После прохождения затвора пучок вновь падает на приемник (вновь перекрыт) и запускается

измерение второго промежутка времени, которое продолжается до следующего перекрытия (открытия) пучка одного из сенсоров (неважно какого), когда заканчивается измерение промежутка времени t_2 и сразу начинается измерение промежутка времени t_3 . Если секундомер находится в

режиме $n - 3$, то возможные последующие перекрытия и

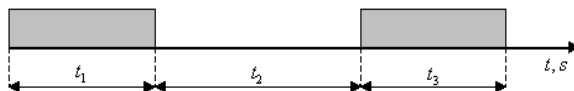


Рис. 6

открытия пучка не учитываются. Теперь в памяти находятся промежутки времени t_1 , t_2 и t_3 , их можно увидеть, нажав на кнопку \uparrow , и занести в таблицу. На оси времени они могут быть представлены, как показано на рисунке 6.

Вышесказанное относится к ручному режиму измерения и чтения промежутков времени. Существует также режим, сопряженный с компьютером, когда измеряемые промежутки времени автоматически вводятся в компьютер, где обрабатываются с помощью специально разработанных программ. В таком случае измеренные промежутки вносятся в таблицы автоматически, одновременно вычисляются значения физических величин, измеряемых косвенно, их средние значения, а также их стандартные погрешности. При необходимости могут быть построены графики изучаемых зависимостей, при этом есть возможность определения систематических погрешностей и исключения их влияния на значения физических величин, измеряемых косвенно.

Возвращаясь к закону сохранения механической энергии (8), заметим, что в нашем случае он может быть записан в виде:

$$\begin{aligned}
 E_1 = E_2 &\Rightarrow E_k = E_n \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{2mR^2}{t_1^2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - e^2} \right) &= mg(x_2 - x_1) \frac{H}{x_2}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Используемая лабораторная установка позволяет освобождать шар в различных точках x_1 желоба наклонной плоскости и измерять промежуток времени t_1 , за который шар своим наибольшим сечением прерывает пучок сенсора, расположенного в точке с координатой x_2 . Таким образом, при изменении координаты x_1 изменяется и промежуток времени t_1 . Поэтому записанное выражение можно представить линейной функцией вида

$$Y = pX + b, \quad (12)$$

где

$$Y = E_{\kappa} = \frac{2mR^2}{t_1^2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - e^2} \right), X = E_n = mg(x_2 - x_1) \frac{H}{x_2}. \quad (13)$$

Теоретическая зависимость (11) показывает, что значения тангенса угла наклона и свободного члена должны быть $p = 1$ и $b = 0$.

Это означает, что график теоретической зависимости является прямой, совпадающей с биссектрисой первой четверти. Экспериментально этот отрезок прямой можно построить, выполнив $n \geq 5$ серий по $N \geq 10$ измерений промежутков времени t_1 , за которое шар с сечением диаметра $d = 2R$ прерывает пучок сенсора, расположенного в положении x_1 на наклонной плоскости. Каждой серии соответствует конкретное значение координаты x_1 начального положения шара. Для каждой серии измерений вычисляются средние значения промежутков времени \bar{t}_1 , кинетической энергии $\bar{Y} = \bar{E}_{\kappa}$, потенциальной энергии $\bar{X} = \bar{E}_n$, а также стандартной погрешности среднего арифметического, допущенные при прямых измерениях промежутка времени t_1 [2]:

$$\Delta_c \bar{t}_1 = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (t_{li} - \bar{t}_1)^2} \quad (14)$$

и при косвенных измерениях кинетической энергии $Y = E_c$

$$\Delta_c \bar{Y} = \Delta_c \bar{E}_k = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (E_{ki} - \bar{E}_k)^2}, \quad (15)$$

где N – число измерений в проделанной серии. Из (14) и (15) следует, что стандартные погрешности $\Delta_c \bar{t}$ и $\Delta_c \bar{E}_k$ уменьшаются при увеличении числа измерений N в рамках каждой серии. Получив таким образом $n \geq 5$ пар значений кинетической и потенциальной энергий для $n \geq 5$ значений координаты шара x_1 ,

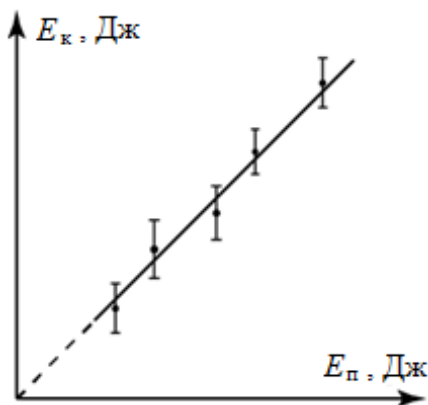


Рис. 7

можно построить график линейной зависимости (12) (рис. 7) и вычислить тангенс угла наклона p и свободный член b , используя метод наименьших квадратов [2]:

$$p = \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})Y_j}{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}, \quad b = \bar{Y} - p\bar{X}, \quad (16)$$

где

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j. \quad (17)$$

Этим же методом вычисляются стандартные погрешности тангенса угла наклона и свободного члена [2]:

$$\Delta_c p \approx \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (Y_j - pX_j - b)^2}{(n-1) \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}},$$

$$\Delta_c b \approx \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2} \right) \frac{\sum_{j=1}^n (Y_j - pX_j - b)^2}{n-1}}.$$
(18)

Величины $\Delta_c \bar{t}_1$, $\Delta_c \bar{E}_k$, p , b , \bar{X} , \bar{Y} , $\Delta_c p$ и $\Delta_c b$ вычисляются компьютером по разработанной программе, но могут быть вычислены и вручную. Окончательный результат записывается в виде

$$p \pm \Delta_c p; b \pm \Delta_c b$$
(19)

для доверительной вероятности $P^* = 0,683$ и в виде

$$p \pm t(P^*, k) \cdot \Delta_c p; b \pm t(P^*, k) \cdot \Delta_c b$$
(20)

для других значений доверительной вероятности (по указанию преподавателя) [2]. Справедливость закона сохранения энергии (11) в процессе скатывания шара с наклонной плоскости считается подтвержденной экспериментально, если график функции (12), построенный по экспериментальным точкам, является отрезком прямой, а величина теоретического значения $p_{теор} = 1$ попадет в доверительный интервал (20) для доверительной вероятности $P^* = 0,999$.

Следует отметить, что на теоретическую зависимость (11) оказывают влияние некоторые факторы, которые не были приняты во внимание в проанализированной модели. На эту зависимость может влиять и приближение, используемое при косвенном вычислении скорости шара в точке x_1 . В связи с

этими факторами накладываются ограничения на применимость полученного выражения (11):

1. Как было отмечено ранее, чтобы закон сохранения механической энергии выполнялся, необходимо, чтобы работа силы трения качения \vec{F}_τ была много меньше кинетической E_k или потенциальной энергии E_n . Сила трения качения \vec{F}_τ приложена в точках D шара (рис. 1), которые соприкасаются с желобом. Мгновенная скорость этих точек равна нулю. Поэтому сила трения качения не совершает механической работы и, следовательно, не изменяет кинетическую энергию шара при его скатывании. Сила трения качения – это сила трения покоя и её роль сводится к приведению шара в движение скатывания без скольжения. При наличии силы трения качения работа силы тяжести идёт на увеличение кинетической энергии не только поступательного, но и вращательного движения. Заметим, что сила реакции наклонной плоскости \vec{N} , будучи направленной перпендикулярно движению, также не совершает механической работы. Эти суждения верны, только если шар и желоб – абсолютно твёрдые тела. Поскольку реальные тела не являются таковыми, то ясно, что и шар, и желоб слегка деформируются при скатывании шара, поэтому сила трения совершает некоторую отрицательную механическую работу $A_{\text{тр}}$, и выражение (11) в таком случае принимает вид:

$$\frac{2mR^2}{t_1^2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - e^2} \right) = mg(x_2 - x_1) \frac{H}{x_2} + A_{\text{тр}}. \quad (21)$$

Остаётся выяснить, как сильно влияет эта работа на величину кинетической энергии шара в конечном состоянии. Сравнивая (21) и (12), замечаем, что $A_{\text{тр}} = b$. Обработка экспериментальных данных покажет нам значение свободного члена b , а также его стандартную погрешность Δb . Возможны два случая:

а) $|\Delta b| \geq b$. В этом случае можно сделать вывод, что прямая (12) в пределах ошибок эксперимента проходит через начало координат, как требует теоретическая зависимость (11), а работой силы трения качения можно пренебречь, её величина имеет порядок допущенных в эксперименте ошибок. При проверке соотношения $|\Delta b| \geq b$ нужно иметь в виду, что стандартная погрешность Δb вычисляется с помощью программы, предложенной для доверительной вероятности $P^* = 0,683$. Для большей доверительной вероятности, например, $P^* = 0,999$ стандартная погрешность будет $\Delta b \cdot t(0,999, k)$, где $k = n - 1$, n – число серий измерений. Значение коэффициента $t(0,999, k)$ для различного числа k определяется из таблицы [2].

б) $|\Delta b| < b$ для доверительной вероятности $P^* = 0,999$. В этом случае можно сделать вывод, что работа силы трения качения больше допускаемых в опыте ошибок, её можно вычислить как разность кинетической и потенциальной энергий:

$$\frac{2mR^2}{t_1^2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - e^2}\right) - mg(x_2 - x_1) \frac{H}{x_2} = A_{\text{тр}}. \quad (22)$$

Но $A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}(x_2 - x_1) \cos \pi = -F_{\text{тр}}(x_2 - x_1)$, где $F_{\text{тр}} = \mu_{\text{кач}} N =$

$$= \mu_{\text{кач}} mg \cos \alpha = \mu_{\text{кач}} mg \sqrt{1 - \frac{H^2}{x_2^2}}, \text{ а } \mu_{\text{кач}} \text{ – коэффициент трения}$$

качения. Теперь выражение (22) может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
 & mg(x_2 - x_1) \frac{H}{x_2} - \frac{2mR^2}{t_1^2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - e^2} \right) = \\
 & = \mu_{\text{кач}} mg(x_2 - x_1) \sqrt{1 - \frac{H^2}{x_2^2}}.
 \end{aligned} \tag{23}$$

И это выражение является линейной функцией вида (12), т.е.

$Y_1 = P_1 X_1 + b_1$, где

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= mg(x_2 - x_1) \frac{H}{x_2} - \frac{2mR^2}{t_1^2} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{R^2}{R^2 - e^2} \right), \\
 X_1 &= mg(x_2 - x_1) \sqrt{1 - \frac{H^2}{x_2^2}},
 \end{aligned} \tag{24}$$

А $p_1 = \mu_{\text{кач}}$ и $b_1 = 0$.

Построив в этом случае по экспериментальным точкам график зависимости Y_1 от величины X_1 , можно определить тангенс угла наклона полученной прямой, который совпадает с коэффициентом трения качения.

2. Выражение (11) для закона сохранения механической энергии было получено в предположении, что шар скатывается по желобу без скольжения. Но скольжение шара зависит от величины силы трения качения, которая, как будет видно позднее, в работе 5с [3], – это сила трения покоя, которая увеличивается вместе с ростом угла наклона α плоскости относительно горизонта:

$$F_\tau = \frac{2mR^2 g}{7R^2 - 5e^2} \sin \alpha. \tag{25}$$

Шар не будет скользить, пока сила трения качения будет меньше силы трения скольжения:

$$F_\tau < F_{\text{тр}} = \mu N = \mu \cdot mg \cdot \cos \alpha. \tag{26}$$

Если $F_\tau \geq F_{\text{тр}}$, то скатывание шара по желобу сопровождается его скольжением и выражение (11) неверно. Таким образом, углы наклона плоскости относительно

горизонта, для которых закон сохранения механической энергии (11) выполняется, согласно формулам (25) и (26), должны удовлетворять условие:

$$F_{\tau} < F_{\text{тр}} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha < \frac{\mu(7R^2 - 5e^2)}{2R^2} = \operatorname{tg} \alpha_{\text{макс}}, \quad (27)$$

где $\alpha_{\text{макс}}$ – угол наклона желоба относительно горизонта, при котором начинается скольжение шара. Ширина используемого в лабораторной установке желоба $2e \approx 7 \text{ мм}$. Взяв стальной шар радиусом $R = 11 \text{ мм}$ и при коэффициенте трения скольжения стали по стальной поверхности $\mu \approx 0,2$ (табличная величина), для максимального угла наклона плоскости получим $\alpha_{\text{макс}} \approx 33^\circ$. Поскольку в применяемой установке угол наклона желоба $\alpha \approx 45^\circ$, то для экспериментальной проверки закона сохранения механической энергии нужно использовать шары, характеризующиеся большим коэффициентом трения скольжения. В работе используется металлический шар с резиновым покрытием. Коэффициент трения скольжения резины о стальную поверхность $\mu \approx 0,8$ (табличное значение) и для максимального угла наклона получается значение $\alpha_{\text{макс}} \approx 69^\circ$. Таким образом, для подобных шаров угол наклона желоба относительно горизонта $\alpha \approx 45^\circ$ вполне годится для проверки закона сохранения механической энергии.

3. При равноускоренном поступательном движении любого тела ($a = \text{const.}$), его средняя скорость прохождения некоторого пути d совпадает с мгновенной скоростью для середины промежутка времени t , за который тело проходит этот путь.

$$v_{\text{cp}} = \frac{d}{t} = \frac{v_0 t + at^2/2}{t} = v_0 + a \cdot \frac{t}{2}, \quad (28)$$

где v_0 – начальная скорость тела.

Как будет показано в лабораторной работе 5с [3], скатывание шара по желобу с наклонной плоскости без скольжения представляет собой равноускоренное движение с ускорением

$$a = g \frac{5(R^2 - e^2)}{7R^2 - 5e^2} \sin \alpha, \quad (29)$$

а это означает, что формула (28) применима и в данной работе:

$$\frac{d}{t_1} = v_0 + a \cdot \frac{t_1}{2}, \quad (30)$$

где t_1 – это промежуток времени, в течение которого шар с сечением диаметром $d = 2R$ перекрывает пучок сенсора, а v_0 – скорость шара в момент начала перекрытия им пучка сенсора. Чтобы измерить координату x_2 шара в конечном состоянии, сравним мгновенную скорость v в середине промежутка времени t_1 , считая её приблизительно равной средней скорости на пути d , со скоростью v_M в точке M , совпадающей с серединой пройденного пути d . Согласно формуле Галилея,

$$v_M^2 - v_0^2 = ad. \quad (31)$$

Из выражений (30) и (31) следует:

$$\begin{aligned} v_M^2 &= v_0^2 + ad = \left(\frac{d}{t_1} - \frac{at_1}{2} \right)^2 + ad = \frac{d^2}{t_1^2} \left(1 + \frac{a^2 t_1^4}{4d^2} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow v_M &= v \sqrt{1 + \frac{a^2 t_1^4}{4d^2}} = v \sqrt{1 + \frac{a^2 t_1^4}{16R^2}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Отсюда следует, что приближительное равенство $v_{cp} \approx v_M$, использованное при выводе формулы (11), имеет место, если $a^2 t_1^4 / (16R^2) \ll 1$ или если

$$t_1 \ll 2 \sqrt{\frac{R}{a}}. \quad (33)$$

В таком случае допускается относительная погрешность:

$$\varepsilon = \frac{|v - v_M|}{v} = \left| 1 - \frac{v_M}{v} \right| = \left| 1 - \sqrt{1 + \frac{a^2 t_1^4}{16R^2}} \right|. \quad (34)$$

Если $R = 11 \text{ мм}$, $e = 3,5 \text{ мм}$, $\alpha \approx 45^\circ$ и $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, то для ускорения шара получаем $a \approx 4,8 \text{ м/с}^2$, а для измеряемых промежутков времени – условие $t_1 \ll 0,1 \text{ с}$. Опыт показывает, что при скатывании шара из положения с координатой $x_1 \approx 10 \text{ см}$ шар перекрывает пучок сенсора сечением диаметром $d = 2R$ в течение промежутка времени $t_1 = 0,02 \text{ с}$, который примерно в 10 раз меньше, чем оцениваемый с помощью соотношения (33). Подставив это значение в (34), получим относительную погрешность $\varepsilon \approx 0,001$, т. е. $\varepsilon_M \approx 0,1\%$. Эта погрешность, которая является систематической погрешностью метода, для затвора толщиной $d = 0,022 \text{ м}$, как будет видно в результате обработки экспериментальных данных, много меньше случайных погрешностей, допускаемых в эксперименте, и ею можно пренебречь.

Ход работы

1. Включите электронный секундомер и компьютер. Запустите программу накопления данных и выполнения лабораторной работы, заполните титульный лист. С помощью кнопки „**Continuare**” (Продолжение) откройте окошко „**Caracteristicile lucrării**” (Характеристики работы) и проанализируйте её содержание. Заполните разделы „**Scopul lucrării**” (Цель работы), „**Aparate și accesorii**” (Приборы и принадлежности). Активируя кнопку „**Continuare**”, откройте окошко „**Efectuarea măsurărilor**” (Выполнение измерений). Выберите число серий $n \geq 5$ и число измерений $N \geq 7$ в рамках каждой серии (по указанию преподавателя) и внесите их в компьютер.

2. С помощью весов определите массу шара m , измерьте штангенциркулем его диаметр $d=2R$ и ширину желоба. По миллиметровой линейке определите координату x_2 конечного положения шара, которое совпадает с положением луча сенсора электронного хронометра. Для этого установите шар на желобе таким образом, чтобы его край запускал измерение времени. Определив по линейке координату отметки на шаре и прибавив к ней радиус шара, найдите координату x_2 . С помощью нивелира и миллиметровой линейки определите высоту наклонной плоскости H относительно уровня точки с координатой x_2 . Введите все эти величины в компьютер.
3. С помощью механизма освобождения установите шар в одном из положений x_1 на желобе наклонной плоскости так, чтобы в дальнейшем могло быть взято ещё $n-1$ его положений. С шагом 1-2 см координату x_1 также введите в компьютер.
4. Нажмите кнопку „**Start**” (Старт) и освободите шар. Если его движение происходило в удовлетворительных условиях, нажмите на кнопку „**Citirea datelor**” (Чтение данных) и введите в компьютер промежуток времени t_1 . В противном случае нажмите на кнопку „**Restart**” и повторите измерение.
5. Повторите пункт 4 ещё $N - 1$ раз, проанализируйте полученные N значений измеренного промежутка времени t_1 , среднее значение $\overline{t_1}$ и $\overline{E_K}$, а также значения стандартных погрешностей средних арифметических этих величин. По указанию преподавателя проверьте вручную вычисления одной или обеих стандартных погрешностей $\Delta_c \overline{t_1}$ и $\Delta_c \overline{E_K}$ с помощью формул (14) и (15), соответственно. Удовлетворительными считаются такие условия, когда движение шара происходит без отклонений от

направляющего желоба и шар правильно освобожден из положения x_1 .

6. Выберите другое положение x_1 шара, введите его в компьютер и выполните другую серию измерений, повторив пункт 4 и 5.
7. Повторите пункт 6 ещё $n - 2$ раз.
8. После окончания n серий измерений активируйте кнопку „**Continuare**” и откройте окошко „**Procesarea datelor experimentale**”.
9. Нажмите на кнопку „**Accept**” в пункте „**Prelucrarea datelor experimentale**” и получите график изучаемой зависимости, значения тангенса угла её наклона p и свободного члена b . По указанию преподавателя вручную проверьте вычисления величин p и b с помощью формул (16) и (17).
10. Активируйте кнопку „**Accept**” в пункте „**Calculul erorilor**” и получите стандартную погрешность тангенса угла наклона Δp и свободного члена Δb для доверительной вероятности $P^* = 0,683$. По указанию преподавателя проверьте вычисление величин Δp и Δb по формулам (18).
11. Вычислите вручную эти погрешности и для другого значения доверительной вероятности, указанного преподавателем.
12. Введите окончательный результат в виде доверительного интервала (19) и (20).
13. Щёлкните на кнопке „**Accept**” в пункте „**Concluzii**” и в открывшемся окошке сформулируйте выводы к работе. Формулирование выводов считается домашним заданием. Выводы должны содержать:
 - утверждения относительно справедливости закона, проверяемого экспериментально методом наименьших квадратов, с указанием доверительной вероятности, с которой может или не может считаться справедливым проверяемый закон;

- утверждения относительно величины работы силы трения качения по сравнению со случайными погрешностями, допущенными в опыте (анализ одного из случаев $\Delta b \geq b$ или $\Delta b < b$, реализуемых в опыте);
 - утверждения относительно возможности пределов применимости проверяемого выражения по углу наклона желоба и по величине коэффициента трения скольжения;
 - утверждения относительно наличия или отсутствия скольжения шара при его скатывании по желобу наклонной плоскости;
 - утверждения относительно систематической погрешности, вносимой методом, применяемым для измерения промежутка времени, в течение которого шар перекрывает пучок сенсора;
 - утверждения относительно применения других методов исследования, отличных от того, что использован в выполняемой работе.
 - Предложения относительно применения других методов исследования, отличных от того, что использован в выполняемой работе.
14. Активируйте кнопку „**Referat**” и запустите программу оформления и сохранения отчёта.
15. Нажмите на кнопку „**Finis**” и завершите выполнение лабораторной работы. Выключите хронометр и компьютер.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение поступательного и вращательного движения, понятий: линейной и угловой скорости, массы и момента инерции, кинетической энергии поступательного и вращательного движения тела, потенциальной энергии, механической энергии.
2. Напишите выражения для кинетической энергии поступательного и вращательного движения тела.

3. По какой формуле вычисляется момент инерции системы материальных точек?
Как вычисляется момент инерции тела с непрерывным распределением его массы?
4. Напишите формулу для вычисления момента инерции однородного шара относительно оси, совпадающей с одним из его диаметров.
5. Сформулируйте закон сохранения механической энергии.
6. Как определяется угловая скорость шара при его скатывании без скольжения?
7. Чему равна линейная скорость точек шара, касающихся желоба при скатывании с наклонной плоскости и почему?
8. На каком расстоянии от оси вращения находятся точки шара, соприкасающиеся с желобом при скатывании?
9. Как в работе определяется скорость центра масс шара?
10. Какие величины в эксперименте определяются прямым измерением?
11. Каков принцип действия электронного секундомера? В каком режиме он может работать?
12. Сколько последовательных промежутков времени можно измерять с помощью электронного хронометра и как велики они могут быть?
13. Из чего состоит сенсор электронного секундомера?
14. Как в эксперименте выражается закон сохранения механической энергии через величины, определяемые прямым измерением?
15. Какая математическая зависимость используется в опыте для проверки закона сохранения механической энергии?
16. Сколько серий измерений и сколько измерений в рамках каждой серии следует выполнить и почему?

17. По каким формулам вычисляются стандартные погрешности $\Delta_c \bar{t}_1$ и $\Delta_c \bar{E}_k$ средних арифметических значений промежутка времени, измеренного в рамках каждой серии, и кинетической энергии? Какой доверительной вероятности соответствуют эти погрешности?
18. Чему равны теоретические значения тангенса угла наклона прямой p и свободного члена b ?
19. Какой метод используется для построения экспериментального графика зависимости кинетической энергии шара в конечном состоянии от потенциальной энергии в начальном состоянии и в чем он состоит?
20. Как вычисляются экспериментальные значения тангенса угла наклона прямой p и свободного члена b ?
21. Почему экспериментальные значения тангенса угла прямой $p \neq 1$ и свободного члена $b \neq 0$?
22. Как записывается окончательный результат для разных значений доверительной вероятности?
23. В каком случае считают, что закон сохранения механической энергии проверен экспериментально?
24. Почему для абсолютно твердых шара и желоба работа силы трения качения равна нулю? Почему для реальных шара и желоба эта работа отлична от нуля?
25. Что означает $\Delta b \geq b$?
26. Что означает $\Delta b < b$?
27. При каких условиях может быть определен коэффициент трения качения и каким методом?
28. При каких условиях скатывание шара не сопровождается скольжением?
29. Для каких углов наклона направляющего желоба скатывание не сопровождается скольжением?

30. Почему выражение для закона сохранения механической энергии, полученное в работе, неприменимо, если скатывание шара по желобу сопровождается скольжением?
31. Какое допущение используется для определения скорости поступательного движения шара в конце пути и к каким ошибкам это ведет? При каких условиях ими можно пренебречь?

Литература

1. Детлаф А., Яворский Б.М.. Курс физики, Москва, «Высшая школа», 1989.
2. Русу А., Русу С., Пырцак К. Обработка экспериментальных данных. Методические указания к лабораторному практикуму по физике (перевод с румынского языка Шербан К. и Бурдужан Э.) – Chişinău: “Tehnica – UTM”, 2013.
3. Русу А., Русу С., Пырцак К., Шербан К., Мокряк О. Лабораторные работы по механике с компьютерной обработкой данных. Методические указания к лабораторному практикуму по физике. – Chişinău: “Tehnica – UTM”, 2014.

Редактор: Т. Олиниченко

Bun de tipar 15.06.15. Formatul hârtiei 60x84 1/16.
Hârtie ofset. Tipar RISO Tirajul 50 ex.
Coli de tipar 1,75. Comanda nr.

MD-2004, UTM, Chișinău, bd. Ștefan cel Mare și Sfânt, 168
Editura „Tehnica-UTM”
2068, Chișinău, str. Studenților, 9/9